
THEORIE DE DECOMPOSITION DES PHENOMENES CYCLIQUES

Chapitre 3 sur 6 :

Répartition exacte des Nombres Premiers

par WEIDMANN Sébastien

(travaux débutés en Octobre 2006)

Modifications éventuelles et droits d'utilisation

Je me réserve le droit d'apporter des modifications ou des corrections à tout instant si j'estime que cela est nécessaire (notamment pour corriger des erreurs éventuelles ou compléter des réflexions qui pourraient être insuffisantes).

Certains passages ne sont pas complets car ils sont secondaires (non essentiels à la compréhension globale de cette théorie), mais ils sont en cours de réalisation. Cela est précisé lorsque c'est le cas.

Le **Chapitre 4** est un chapitre important mais il ne sera publié intégralement que lorsque j'estimerai que mes travaux le concernant auront atteint une maturité satisfaisante.

Il n'y a pas de contrainte de temps concernant ces travaux en cours de réalisation.

Travaux en 6 Chapitres, débutés en Octobre 2007. Tous droits réservés à **WEIDMANN Sébastien**, né à Chaumont (52 000), FRANCE.

Toute personne désirant utiliser partiellement ou complètement cette théorie peut le faire à la seule condition de le mentionner et d'associer à cette mention mes nom et prénom (aux parties ou formules utilisées, par exemple). Ceci offre quelques souplesse et liberté d'utilisation.

La redistribution de ces fichiers est également autorisée à condition de ne pas en modifier le contenu. **Aucune modification ne peut être faite sans mon accord.**

Par conséquent, pour d'éventuelles suggestions, merci de me contacter par l'intermédiaire du site **FUTURA-SCIENCES** (vous devez être inscrit comme membre, l'inscription est relativement simple) :

(ne vous attendez pas à une réponse systématique de ma part)

[Cliquez ici pour m'envoyer un mail \(message privé, pseudo : **WizartS**\)](#)

Chapitre 3 :

REPARTITION EXACTE DES NOMBRES PREMIERS

Modifications éventuelles et droits d'utilisation / mail	2
Introduction	5
1 Reconstitution de P_n par les formules de type $s(M)$ et $\mathfrak{I}(M)$	7
1.1 Rappels	7
1.2 Etude	10
1.3 Formule P_n de répartition exacte des nombres premiers	20
2 Formule de répartition exacte des nombres premiers jumeaux P_j	23
3 Réécriture de la fonction ζ (Zêta) de RIEMANN	41
4 Impressions personnelles :	43

Introduction

Dans le fond, la méthode proposée pour atteindre notre objectif fait penser à la méthode de *MINÁC – WILLANS*. Cependant, elle diffère largement dans la forme puisqu'elle invoque des fonctions que nous avons pu construire dans le **Chapitre 1** et qui seront rappelées dans ce chapitre, ce qui permet de donner une alternative. Ces fonctions sont principalement la fonction $s(M)$ (la simplifiée de variable M , définie dans le **Chapitre 1**) et la fonction $\mathfrak{I}(M)$ (l'Impulsion Première de variable M , définie dans le **Chapitre 1**). La fonction $\mathfrak{I}(M)$, qui correspondant à un cas particulier de la fonction $s(M)$, va s'avérer très utile ici.

(ATTENTION, une fois encore dans ce chapitre, les crochets ont la même fonction que de simples parenthèses, ils ne signifient donc ni “valeur absolue” ni “partie entière”)

1

Reconstitution de P_n par les formules de type $s(M)$ et $\mathfrak{J}(M)$

Il existe un moyen pour trouver tous les nombres premiers dans l'ordre croissant et sans répétition.

Nous allons faire référence à la formule $s(M)$ (qui est un cas particulier de la formule $f(M; x)$) abordée dans le **Chapitre 1**.

1.1 Rappels

- Rappelons que, pour un ordre croissant de nombres premiers consécutifs, P_n est le $n^{ième}$ nombre premier. Lorsque nous traitons l'ensemble des nombres premiers, nous avons donc forcément $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. L'objectif est d'obtenir :

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \\ P_2 &= 3 \\ P_3 &= 5 \\ P_4 &= 7 \\ P_5 &= 11 \\ P_6 &= 13 \\ P_7 &= 17 \\ P_8 &= 19 \\ P_9 &= 23 \\ &\dots \end{aligned}$$

- La formule $s(M)$ est la simplifiée de variable M . Elle est le cas particulier de la formule $f(M; x)$ dans lequel $M = N$ et $x = 1$ (voir **Chapitre 1**).

$s(M)$ est définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$:

$$S(M) = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M - v) \right) \cdot \frac{\sin^2 \left((M - 1)! \cdot \frac{\pi}{M} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Ou encore, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$S(M) = \frac{\sin^2 \left((M - 1)! \cdot \frac{\pi}{M} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Nous l'avons vu dans le **Chapitre 1**, ceci qui est aussi équivalent à :

$$S(M) = \frac{\sin^2 \left((M - 2)! \cdot \frac{\pi}{M} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} s(M) &= 1 && \text{si } M \in \mathbb{P} \text{ (la réciproque est vraie)} \\ s(M) &= 0 && \text{si } M \notin \mathbb{N} \text{ (la réciproque est vraie)} \end{aligned}$$

- La formule $\mathfrak{I}(M)$:

La formule $\mathfrak{I}(M)$ est la formule d'Impulsion Première de variable M . La formule $\mathfrak{I}(M)$ est définie pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$ et se note :

$$\mathfrak{I}(M) = s(2.M + 2)$$

$s(2.M + 2)$ étant la simplifiée de variable $(2.M + 2)$.

Ou encore (équivalent) :

$$\mathfrak{I}(M) = s(M+2).s(M+3)$$

$s(M+2)$ étant la simplifiée de variable $(M+2)$ et
 $s(M+3)$ étant la simplifiée de variable $(M+3)$.

Elle se caractérise par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(M) &= 1 && \text{si } M = 0 \text{ (la réciproque est vraie)} \\ \mathfrak{I}(M) &= 0 && \text{si } M > 0 \text{ (la réciproque est vraie)} \end{aligned}$$

Effectuons un petit raisonnement dans ce paragraphe. En changeant de variable tel que ce qui suit, nous pouvons obtenir une formule d'Impulsion Première :

Pour $M = X^{2a}$

$\mathfrak{I}(X^{2a})$ est définie pour tout $X \in \mathbb{Z}$ et pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$.

Pour $a = 1$, Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(X^2) &= 1 && \text{si } X = 0 \\ \mathfrak{I}(X^2) &= 0 && \text{si } X \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (\text{pour tout entier positif ou négatif sauf } 0) \end{aligned}$$

- La formule $C(M)$:

La formule de comptage des nombres premiers $C(M)$ est définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. Pour N_1 et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que N_1 et $N_2 \geq 2$, la valeur de $C(M)$ donne la quantité de nombres premiers appartenant à l'intervalle $[N_1; N_2]$:

$$C_{N_1}^{N_2}(M) = \sum_{M=N_1}^{M=N_2} s(M)$$

1.2 Etude

Changeons quelque peu les notations précédentes pour démarrer cette étude.
Réécrivons :

$$C_{N_1}^{N_2}(M) = \sum_{D=N_1}^{D=N_2} s(D)$$

Les propriétés des formules restent les mêmes, nous changeons simplement de nom de variable avec $D \in \mathbb{N}$, $D \geq 2$. En restreignant la formule $C(D)$ à l'intervalle $[2; M]$, nous avons :

$$C_2^M(D) = \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$$

Cette formule de comptage ne peut être qu'un nombre entier supérieur ou égale à 1.

Notons n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier P_n tel que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et raisonnons pas à pas.

• 1ière partie du raisonnement :

Notons X la différence entre n et la formule $C(D)$ restreinte à l'intervalle $[2; M]$:

$$X = n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$$

D'où

- Pour $n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ nous avons $X = 0$
- Pour $n > \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ nous avons $X \in \mathbb{Z} - \{0\}$
- Pour $n < \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ nous avons $X \in \mathbb{Z} - \{0\}$

Regroupons les résultats de la formule de X en fonction de n et de M dans un tableau :

$$X = n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$$

[illegible]

• 2ième partie du raisonnement :

$$\text{- Pour } n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \quad \text{nous avons } X = 0$$

$$\text{Et donc } X^2 = 0$$

$$\text{- Pour } n > \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \quad \text{nous avons } X \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$\text{Et donc } X^2 \in \mathbb{N} - \{0\} , \text{ ce qui revient à écrire } X^2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } X^2 > 0.$$

$$\text{- Pour } n < \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \quad \text{nous avons } X \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$\text{Et donc } X^2 \in \mathbb{N} - \{0\} , \text{ ce qui revient à écrire } X^2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } X^2 > 0.$$

\Rightarrow Ce qui permet d'effectuer la synthèse :

$$\text{- Pour } n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D) , \text{ nous avons :}$$

$$X^2 = \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 = 0$$

$$\text{- Pour } n > \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \text{ et pour } n < \sum_{D=2}^{D=M} s(D) ,$$

$$\text{c'est-à-dire pour } n \neq \sum_{D=2}^{D=M} s(D) , \text{ nous avons :}$$

$$X^2 = \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \quad \text{tel que } X^2 \in \mathbb{N} \text{ et } X^2 > 0.$$

Regroupons les résultats de cette formule en fonction de n et de M dans un tableau :

$$X^2 = \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2$$

[illegible]

• 3ième partie du raisonnement :

- Pour $n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$:

La valeur de $\sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ est constante tant que le nombre premier suivant n'a pas été atteint par M . Autrement dit, cette valeur est constante pour M appartenant à un intervalle. Pour $P_n \in \mathbb{P}$ et pour $P_{(n+1)} \in \mathbb{P}$ (ici, $P_{(n+1)}$ est donc le nombre premier consécutif et supérieur à P_n), la valeur de $\sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ est constante sur l'intervalle $M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$.

Nous en déduisons que :

$$n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \quad \text{pour } M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$$

$$\text{Et donc que : } X^2 = 0 \quad \text{pour } M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$$

Dans ce cas, nous retrouvons :

$$\mathfrak{I}(X^2) = \mathfrak{I} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} = 1 \quad \text{pour } M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$$

- Pour $n \neq \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$, c'est-à-dire dans tous les autres cas, nous avons :

$$X^2 > 0 \text{ tel que } X^2 \in \mathbb{N}.$$

Dans ce cas, nous retrouvons (donner un intervalle dans ce cas n'est pas nécessaire pour la suite du raisonnement) :

$$\mathfrak{I}(X^2) = \mathfrak{I} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} = 0$$

Regroupons les résultats de cette formule en fonction de n et de M dans un tableau :

$$\mathfrak{I}(X^2) = \mathfrak{I} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\}$$

[illegible]

• 4ième partie du raisonnement :

Etudions, la formule suivante :

$$\begin{aligned} M.s(M) &= M && \text{pour } M = P_n \text{ (nous avons noté } P_n \in \mathbb{P}) \\ M.s(M) &= 0 && \text{pour } M \neq P_n \end{aligned}$$

Pour cette seconde égalité, il est intéressant de préciser l'intervalle. En effet, en reprenant les notations de la “**2ième partie du raisonnement**”, nous avons :

$$M.s(M) = 0 \quad \text{pour } M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$$

D'où

$$M.s(M).\mathfrak{J}(X^2) = 0 \quad \text{pour } M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$$

- Pour $X^2 = 0$ et pour $M = P_n$, et uniquement dans ce cas, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned} M.s(M).\mathfrak{J}(X^2) &= M.s(M).\mathfrak{J} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \\ &= P_n.s(P_n).\mathfrak{J} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=P_n} s(D) \right]^2 \right\} \\ &= P_n.(1).(1) \\ &= P_n \end{aligned}$$

- Pour $X^2 > 0$ (c'est-à-dire dans tous les autres cas, et cette fois-ci peu importe les autres valeurs de M), comme nous avons :

$$\mathfrak{J}(X^2) = 0$$

Nous déduisons également facilement que :

$$M.s(M).\mathfrak{J}(X^2) = 0$$

Rappelons que $s(M)$ n'est définie que pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$.

Regroupons les résultats de cette formule en fonction de n et de M dans un tableau :

$$M.s(M).\mathfrak{I}(X^2) = M.s(M).\mathfrak{I}\left\{\left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)\right]^2\right\}$$

[illegible]

• 5ième partie du raisonnement :

D'après la formule précédente (et d'après le tableau précédent) :

Pour n constant, il nous suffit de faire la somme de toutes les valeurs de la colonne correspondant à n , pour $M \in [2; +\infty]$. Comme toutes les valeurs de la colonne sont à 0 sauf une seule, qui vaut d'ailleurs le nombre premier recherché, la somme de toutes ces valeurs vaut finalement ce nombre premier recherché.

La formule du $n^{ième}$ nombre premier P_n recherché s'écrit donc :

$$P_n = \sum_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} \left(M.s(M). \mathfrak{I} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right)$$

La formule donnant P_n étant définie pour tout $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$.

Cette formule permet donc de donner de manière exacte et générale la répartition de tous les nombres premiers consécutifs (c'est-à-dire selon la valeur de n) dans l'ordre croissant.

Nous voyons clairement dans cette formule que la formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}(X^2)$ (qui permet de ramener le raisonnement mathématique à une logique binaire, comme celle de l'algèbre de *BOOLE*) et la simplifiée $s(M)$ (établissant également un lien entre le raisonnement mathématique et l'algèbre de *BOOLE*) sont d'une importance capitale. La formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}(X^2)$ et la simplifiée $s(M)$ permettent de ramener le raisonnement mathématique à un raisonnement en logique "binaire", comme celle de l'algèbre de *BOOLE* (en donnant des résultats qui ne peuvent être que 0 ou 1). Comme la formule d'Impulsion Première est un cas particulier de la formule simplifiée, nous pouvons considérer que l'utilisation des formules simplifiées sont essentielles pour donner la répartition exacte des nombres premiers.

Cette étude a également permis de confirmer que la répartition des nombres premiers n'est pas dûe au hasard, puisqu'elle se soumet à des règles représentées par une formule précise.

Remarque :

Cette formule ne rend pas les calculs simples, puisque les calculs de la factorielle sont inévitablement plus longs pour les plus grands nombres. Or, l'objectif du **Chapitre 1** ("**3.h.7 Produit de nombres factoriels et divisibilité par M, généralisation**"), et du **Chapitre 4** est de donner une formule où le calcul de la simplifiée est optimal, ce qui permettra aussi d'avoir un impact sur ce chapitre.

En comparaison aux autres formules utilisées (telles que $f(M; x)$, $s(M)$ ou $\mathfrak{I}(M)$), cette formule se donne à un niveau de complexité logique supérieur.

1.3 Formule Pn de répartition exacte des nombres premiers

- Formule P_n de répartition exacte des nombres premiers :

Nous venons d'établir précédemment la formule P_n telle que $P_n \in \mathbb{P}$, pour tout $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$:

$$P_n = \sum_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} \left(M.s(M). \mathfrak{J} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right)$$

En rappelant que :

$$S(M) = \frac{\sin^2 \left(\frac{(M-1)!^m \cdot \pi}{M} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} \quad \text{avec } m \in \mathbb{N}, m \geq 2$$

En rappelant que :

$$S(D) = \frac{\sin^2 \left(\frac{(D-1)!^m \cdot \pi}{D} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{D} \right)} \quad \text{avec } m \in \mathbb{N}, m \geq 2$$

Et que, pour $X = n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(X^2) &= s(X^2 + 2).s(X^2 + 3) \\ &= s(2.X^2 + 2) \\ &= \frac{\sin^2 \left(\frac{(2.X^2 + 1)!^m \cdot \pi}{2.X^2 + 2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2.X^2 + 2} \right)} \end{aligned}$$

- Recherche d'une formule de restriction $R(n)$:

Dans le cas de la formule de répartition exacte des nombres premiers P_n , et comme dans celui de la formule $D(N)$ vue dans le **Chapitre 1**, nous pouvons restreindre notre formule aux calculs les plus utiles (ou plutôt limiter les calculs inutiles) grâce à une formule de restriction $R(n)$ qui remplacera la borne supérieure de M (qui tend vers “ $+\infty$ ”).

Dans ce cas, les calculs s'arrêtent lorsque $R(n) = P_n$, avec $R(n) \in \mathbb{N}$ tel que $R(n) \geq 2$, autrement dit lorsque :

$$\sum_{M=2}^{M=R(n)} \left(M.s(M). \mathfrak{J} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right) \neq 0$$

Car dans ce cas précis, nous avons :

$$P_n = \sum_{M=2}^{M=R(n)} \left(M.s(M). \mathfrak{J} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right)$$

Et donc

$$P_n = \sum_{M=2}^{M=P_n} \left(M.s(M). \mathfrak{J} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right)$$

SUITE EN COURS
DE REALISATION !

Remarque :

Nous pouvons finir en faisant le lien direct avec la formule $s(M)$ puisque $s(M) = 1$ pour $M = P_n$ seulement, P_n étant donné par la formule précédente.

2

Formule de répartition exacte des nombres premiers jumeaux P_j

D'après la même méthode que précédemment, nous pouvons établir une formule donnant la répartition exacte des nombres premiers jumeaux, c'est-à-dire la répartition des nombres premiers jumeaux dans l'ordre croissant.

Notons P_j le $j^{\text{ième}}$ nombre premier de l'ensemble de tous les nombres premiers jumeaux. L'objectif est d'obtenir (sans faire de distinction sur la position des nombres premiers jumeaux au sein d'un couple) :

Pour $j = 1$,	$P_j = 3$
Pour $j = 2$,	$P_j = 5$
Pour $j = 3$,	$P_j = 7$
Pour $j = 4$,	$P_j = 11$
Pour $j = 5$,	$P_j = 13$
Pour $j = 6$,	$P_j = 17$
Pour $j = 7$,	$P_j = 19$
Pour $j = 8$,	$P_j = 29$
Pour $j = 9$,	$P_j = 31$

...

Cette partie est un peu plus délicate que la précédente car elle va nécessiter une synthèse entre 2 formules du même type que la formule P_n (que nous venons d'établir).

Pour éviter que le développement ne soit trop lourd à gérer, donnons quelques conditions au raisonnement. Par anticipation, nous devons utiliser simultanément les formules simplifiées premières $s(M)$, $s(M+2)$ et $s(M-2)$. Ce qui donne tout de suite le domaine de définition de M que nous allons devoir adopter :

$$M \in \mathbb{N} \text{ tel que } M \geq 4$$

Notons $j' \in \mathbb{N}$, $j' \geq 1$.

Effectuons ici aussi le raisonnement en plusieurs parties.

• 1ière partie du raisonnement :

D'après la formule du type de $s(M)$ (voir “**1.1 Rappels**” page 7) et en tenant compte du domaine de définition donné $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 4$:

$$\begin{aligned} s(M) &= 1 && \text{si } M \in \mathbb{P} \\ s(M) &= 0 && \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{aligned}$$

- Nous pouvons donc construire une formule de comptage des couples de nombres premiers jumeaux. Une première approche se fait en donnant :

$$\begin{aligned} s(M).s(M+2) &= 1 && \text{si } M \text{ et } (M+2) \in \mathbb{P} \text{ simultanément,} \\ s(M).s(M+2) &= 0 && \text{si } M \notin \mathbb{P} \text{ ou si } (M+2) \notin \mathbb{P} \text{ seulement.} \end{aligned}$$

D'où $\sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]$ une partie de la formule de comptage.

Or, pour le domaine de définition donné, le premier couple de nombres premiers jumeaux $\{3; 5\}$ ne peut pas être compté par la formule précédente. Pour être exacte, nous devons ajouter 1 à cette formule, ce qui symbolisera que nous avons bien tenu compte du premier couple pour le comptage :

$$1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]$$

Pour M passant par tous les nombres entiers consécutifs du domaine de définition, cette formule donne nécessairement pour résultats tous les nombres entiers de 1 à l'infini.

- Nous pouvons également construire une formule de comptage des couples de nombres premiers jumeaux par une seconde approche en donnant :

$$\begin{aligned} s(M).s(M-2) &= 1 && \text{si } M \text{ et } (M-2) \in \mathbb{P} \text{ simultanément,} \\ s(M).s(M-2) &= 0 && \text{si } M \notin \mathbb{P} \text{ ou si } (M-2) \notin \mathbb{P} \text{ seulement.} \end{aligned}$$

$$\sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)]$$

Pour M passant par tous les nombres entiers consécutifs du domaine de définition, cette formule donne nécessairement pour résultats tous les nombres entiers de 0 à l'infini.

Ici, contrairement à la précédente formule de comptage, le domaine de définition nous permet de compter tous les couples de nombres premiers jumeaux.

- Ces 2 différentes formules de comptage vont être utiles pour la suite.

• 2ième partie du raisonnement :

Dans le couple des nombre premiers jumeaux donné par $\{P_{j'}; P_{(j'+1)}\}$, la variable j' donne le j' *ième* couple. Nous pouvons constater que :

- Si j' est impaire, alors $P_{j'}$ donne le premier (dans l'ordre croissant) du couple de nombres premiers jumeaux,
- Si j' est paire, alors $P_{j'}$ donne le second (dans l'ordre croissant) du couple de nombres premiers jumeaux.

Ce qui indique de séparer les travaux : d'une part pour j' impaire et d'autre part pour j' paire.

Il est impératif de constater que cette méthode contient une contradiction qu'il sera nécessaire de corriger. En effet, cette méthode implique de considérer que le j' *ième* nombre premier jumeau ne peut être le même que le $(j' + 1)$ *ième*.

Or, il existe 2 couples de nombres premiers jumeaux et seulement 2 qui ont un nombre premier en commun, il s'agit des couples :

$$\{3; 5\} \quad \text{et} \quad \{5; 7\}$$

Nous constatons dans ce cas que le nombre 5 va nécessairement se retrouver dans les travaux concernant j' impaire et dans les travaux concernant j' paire. Il deviendra utile de changer de variable en considérant la variable j . La variable j' ne doit donc être considérée que comme une variable intermédiaire permettant d'atteindre notre objectif.

Nous savons donc déjà qu'une formule de correction de ce défaut sera nécessaire.

• 3ième partie du raisonnement :

Dans un premier temps et pour rendre le raisonnement plus simple, omettons volontairement le défaut vu précédemment.

- Si j' est impaire, alors $P_{j'}$ donne le premier (dans l'ordre croissant) du couple de nombres premiers jumeaux.

En notant :

$$X_1 = j' - 2. \left\{ 1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)] \right\} + 1$$

$$\text{Si } j' = 2. \left\{ 1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)] \right\} - 1$$

Alors $X_1^2 = 0$.

Autrement dit : si j' est un nombre impaire. Et comme nous avons vu que pour M passant par tous les nombres entiers consécutifs du domaine de définition, la formule :

$$1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]$$

donne nécessairement pour résultats tous les nombres entiers de 1 à l'infini, cela implique que :

$$X_1^2 = 0 \quad \text{quelquesoit le nombre impaire } j'.$$

$$\text{Et donc} \quad \mathfrak{I}(X_1^2) = 1$$

Maintenant, dans tous les autres cas restants :

$$\text{Si } j' \neq 2. \left\{ 1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)] \right\} - 1$$

Alors X_1^2 vaut un nombre entier, et donc :

$$\mathfrak{I}(X_1^2) = 0$$

- Si j' est paire, alors $P_{j'}$ donne le second (dans l'ordre croissant) du couple de nombres premiers jumeaux.

En notant :

$$X_2 = j' - 2 \cdot \sum_{D=4}^{D=M} [s(D) \cdot s(D-2)]$$

$$\text{Si } j' = 2 \cdot \sum_{D=4}^{D=M} [s(D) \cdot s(D-2)]$$

Alors $X_2^2 = 0$.

Autrement dit : si j' est un nombre paire. Et comme nous avons vu que pour M passant par tous les nombres entiers consécutifs du domaine de définition, la formule :

$$1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D) \cdot s(D-2)]$$

donne nécessairement pour résultats tous les nombres entiers de 0 à l'infini, cela implique que :

$$X_2^2 = 0 \quad \text{quelquesoit le nombre paire } j'.$$

$$\text{Et donc} \quad \mathfrak{I}(X_2^2) = 1$$

Maintenant, dans tous les autres cas restants :

$$\text{Si } j' \neq 2 \cdot \sum_{D=4}^{D=M} [s(D) \cdot s(D-2)]$$

Alors X_2^2 vaut un nombre entier, et donc :

$$\mathfrak{I}(X_2^2) = 0$$

- Pour la suite, en regroupant dans des tableaux les résultats des formules $\mathfrak{I}(X_1^2)$ et $\mathfrak{I}(X_2^2)$, nous pourrons plus facilement mettre en évidence l'orientation de nos recherches.

• 4ième partie du raisonnement :

- D'une part, pour j' impaire, nous avons la formule $\mathfrak{I}(X_1^2)$:

$\mathfrak{I}(X_1^2)$	j'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
3		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
4		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
24		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
31		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
32		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
...												...

A NOTER :

Les couples de nombres premiers jumeaux sont en **bleu**, les croix rouges "x" sont les valeurs impossibles à atteindre car en-dehors du domaine de définition.

Nous constatons clairement que notre formule multipliée par $s(M).s(M+2)$ nous donne la position du premier nombre premier jumeau du couple. La formule s'écrit donc $\mathfrak{J}(X_1^2).s(M).s(M+2)$:

$\mathfrak{J}(X_1^2).s(M).s(M+2)$	j'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
3		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
24		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
31		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
32		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
...												...

A NOTER :

De plus, nous constatons que le nombre premier 3 ne peut pas être donné directement par cette méthode puisqu'il est en-dehors du domaine de définition.

- D'autre part, pour j' paire, nous avons la formule $\mathfrak{I}(X_2^2)$:

[illegible]

Nous constatons clairement que notre formule multipliée par $s(M).s(M-2)$ nous donne la position du second nombre premier jumeau du couple. La formule s'écrit donc $\mathfrak{J}(X_2^2).s(M).s(M-2)$:

[illegible]

- Pour finir, nous pouvons faire la synthèse en regroupant tous ces résultats dans un seul tableau. Ceci va être possible grâce à l'addition de ces 2 formules, notons $Y = \mathfrak{I}(X_1^2).s(M).s(M+2) + \mathfrak{I}(X_2^2).s(M).s(M-2)$:

[illegible]

Comme nous nous y attendions, le nombre 5 se trouvant dans 2 couples différents, j' nous donne ce nombre dans 2 positions différentes. De plus, comme 3 est en-dehors du domaine de définition de M , j' ne peut pas indiquer sa position directement dans le tableau.

Nous allons devoir corriger ces défauts.

- 5ième partie du raisonnement :

- Dernière étape avec les formules avant de corriger les défauts.

$$\text{Notons } Z = \sum_{M=4}^{M \rightarrow +\infty} \{M. [\mathfrak{I}(X_1^2).s(M).s(M+2) + \mathfrak{I}(X_2^2).s(M).s(M-2)]\} :$$

[illegible]

- Premier défaut : Nous constatons que j' ne donne pas de nombre premier pour $j' = 1$, ce qui décale la position dans la répartition des nombres premiers jumeaux. Nous devons donc effectuer un décalage par changement de variable pour résoudre ce problème. En notant $j = j' - 1$ tel que $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$:

[illegible]

- Second défaut : Pour finir, il ne nous reste plus qu'à nous servir du défaut de la répétition du nombre 5 pour convertir le premier des 2 en nombre 3.

Pour corriger ce défaut, nous allons faire appel une nouvelle fois à la formule d'Impulsion Première. Nous allons l'appliquer de telle sorte que seulement la valeur $j = 1$ sera modifiée et aucune autre valeur. Pour cela, notons :

$$\mathfrak{I}(j - 1)$$

Donnons tous les résultats de cette formule pour $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(j - 1) &= 1 && \text{si } j = 1 \\ \mathfrak{I}(j - 1) &= 0 && \text{si } j \in \mathbb{N}, j \geq 2 \end{aligned}$$

Ce qui va permettre d'établir une formule de correction pour $j = 1$ seulement. En effet :

$$\begin{aligned} -2.\mathfrak{I}(j - 1) &= -2 && \text{si } j = 1 \\ -2.\mathfrak{I}(j - 1) &= 0 && \text{si } j \in \mathbb{N}, j \geq 2 \end{aligned}$$

Or, pour $j = 1$, nous avons :

$$Z = \sum_{M=4}^{M \rightarrow +\infty} \{M.[\mathfrak{I}(X_1^2).s(M).s(M + 2) + \mathfrak{I}(X_2^2).s(M).s(M - 2)]\} = 5$$

En effectuant la somme entre la formule de départ et la formule de correction, nous avons :

$$\begin{aligned} &-2.\mathfrak{I}(j - 1) + \sum_{M=4}^{M \rightarrow +\infty} \{M.[\mathfrak{I}(X_1^2).s(M).s(M + 2) + \mathfrak{I}(X_2^2).s(M).s(M - 2)]\} \\ &= -2.\mathfrak{I}(1 - 1) + 5 = 3 \quad (\text{pour } j = 1) \end{aligned}$$

Et les résultats de la somme entre la formule de départ et de la formule de correction sont exactement ceux de la formule de départ lorsque $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$.

Ce qui nous permet de conclure et d'établir la formule de répartition exacte des nombres premiers jumeaux grâce à cette somme.

• Formule P_j de répartition exacte des nombres premiers jumeaux

Rappelons que $j = j' - 1$, donc $j' = j + 1$.

Nous pouvons finalement donner P_j la formule de répartition exacte des nombres premiers jumeaux par une somme qui fait la synthèse de la correction des défauts, où j donne le $j^{ième}$ des nombres premiers jumeaux dans l'ordre croissant ($j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$) et sans répétition :

$$P_j = -2.\mathfrak{J}(j-1) + \sum_{M=4}^{M \rightarrow +\infty} \{M.[\mathfrak{J}(X_1^2).s(M).s(M+2) + \mathfrak{J}(X_2^2).s(M).s(M-2)]\}$$

Avec :

$$\begin{aligned} X_1 &= j' - 2. \left\{ 1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)] \right\} + 1 \\ &= j + 2 - 2. \left\{ 1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)] \right\} \end{aligned}$$

Et avec :

$$\begin{aligned} X_2 &= j' - 2. \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)] \\ &= j + 1 - 2. \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)] \end{aligned}$$

Implicitement : $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 4$

Remarque :

Comme pour P_n (la méthode étant la même), la formule P_j ne rend pas les calculs simples, puisque les calculs de la factorielle sont inévitablement plus longs pour les plus grands nombres.

Ici aussi, en comparaison aux autres formules utilisées (telles que $f(M; x)$, $s(M)$ ou $\mathfrak{J}(M)$), cette formule se donne à un niveau de complexité logique supérieur.

3

Réécriture de la fonction ζ (Zêta) de RIEMANN

Etant donné la fonction ζ de *RIEMANN*, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Et étant donné que dans cette formule, $p \in \mathbb{P}$ permet de parcourir l'ensemble de tous les nombres premiers, ce qui peut donc être remplacé par P_n (voir sous-partie “**1.3 Formule P_n de répartition exacte des nombres premiers**” page **20**) pour n variant de 1 à l'infini, nous obtenons simplement :

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \left[\sum_{M=2}^{M \rightarrow +\infty} \left(M.s(M). \mathfrak{J} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right) \right]^{-s}}$$

4

Impressions personnelles :

D'après le tableau de référence *T.R.1* du **Chapitre 1**, nous avons vu la régularité dans les puissances des facteurs premiers des nombres entiers $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Nous venons également de voir que donner une formule P_n de répartition des nombres premiers était possible par "reconstitution". La régularité est bien là, juste sous nos yeux...

Une fois que je l'ai vu, je n'ai pas ressenti de joie immense mais presque une étrange déception, même après tant d'efforts : celle de constater que jamais rien n'avait changé au sujet des nombres premiers, seuls les points de vue à leur égard ont changé au cours du temps.

J'ai dû me débarrasser de mes principaux défauts, qui m'encombraient pour percevoir le monde tel qu'il est. Il me reste encore un défaut important à changer, puisque j'ai eu suffisamment d'orgueil pour croire que je pouvais réussir là où d'autres ont échoué, m'affranchir de cet orgueil devient nécessaire afin de pouvoir progresser encore.

Je pense que le point de vue le plus juste peut être atteint lorsqu'on se rend compte que pour étudier le monde, il faut pouvoir prendre conscience que nous ne pouvons être qu'une de ses parties, une partie égale à une autre partie du monde finalement, d'où il devient possible d'étudier le monde ou de s'étudier soi-même indifféremment. Ce qui permet de voir que les vérités les plus profondes valables pour ce monde sont aussi contenues en nous-même (puisque nous sommes une partie de ce monde). Ceci permet de mettre en évidence un lien naturelle avec une certaine philosophie (que nous serons amenés à développer par la suite).

J'ai simplement constaté que d'avoir essayé de voir les nombres premiers tels qu'ils étaient et sans "préjugé" m'a permis de voir et de comprendre l'ordre qui y règne. Il faut simplement adopter cette attitude car c'est aussi celle que l'on se doit d'adopter envers les humains et la nature. Il faut être respectueux en général pour comprendre uniquement par soi-même l'ordre dans les nombres premiers (même si cela peut paraître étrange de mêler l'idée de respect à celle de la compréhension d'un phénomène logique, il n'en est rien : ceci sera d'ailleurs développé dans le **Chapitre 5**, qui est selon moi d'une importance au moins aussi significative que les autres, d'un point de vue logique).

Pour la suite, le **Chapitre 4** se donne pour objectif de révéler les régularités qui règnent au sein même des valeurs de la fonction ζ de *RIEMANN*, ainsi qu'une étude permettant d'inclure cette fonction ζ dans un cadre plus générale. L'objectif le plus profond étant de rendre le calcul optimal pour des formules vues telles que $s(M)$ et par conséquent de rendre le calcul optimal pour obtenir P_n .

Chapitre 4 sur 6 :

**Etude de la fonction ζ
de RIEMANN et du nombre π**

(Voir chapitre correspondant pour la suite)